Μαθημα 4ο 19/10/2017

Διαφ. Εξ.

Ασκηση 14

$y'(t)+p(t)y(t)=q(t)$, $p,q \in C([0,+\infty))$

$\lim_{+\infty} q(t)=0$, $\exists\, t_0 \geq 0$, $p(t) \geq \mu > 0$ $\forall\, t \geq t_0$

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t)=0$

Αρχιζω για t_0 γιατι εχω τη σχεση $\forall\, t \geq t_0$

Η γενικη λυση ειναι της μορφης:

$$y(t)=e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\Big[c+\underbrace{\int_{t_0}^{t}q(s)\,e^{\int_{t_0}^{s}p(u)du}ds}_{t\geq 0}\Big]$$

Παρατηρω οτι για $t \geq t_0$ εχουμε

$$p(t)\geq\mu \Rightarrow \underbrace{\mu(t-t_0)}_{\to\infty}=\int_{t_0}^{t}\mu\,ds\leq\int_{t_0}^{t}p(s)ds$$

Αρα

$$\lim_{+\infty}\int_{t_0}^{t}p(s)ds=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{+\infty} c\,e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}=$$

$$=\lim_{+\infty}\frac{c}{e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}}=0 \quad (1)$$

Αρκει να αποδειξω οτι

$$\lim_{+\infty}\frac{\int_{t_0}^{t}|q(s)|\,e^{\int_{t_0}^{s}p(u)du}ds}{e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}}=0$$

ειναι αυξουσα

Εχω μια μη αρν. ποσοτητα.

Εχω δυο περιπτωσεις

1) Φραγμενη

2) Μη φραγμενη να πηγαινει στο $+\infty$

οταν είναι φραγμένη το όριο πάει στο μηδέν
όταν δεν είναι φραγμένη έχω $\frac{+\infty}{+\infty}$ και μπορώ να χρησιμοποιήσω DLH

για δεύτερη περίπτωση

$$= \frac{|q(t)|\, e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}}{p(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}} \leq \frac{|q(t)|}{\mu} \to 0$$

Στο σπίτι να το κάνω με ε-δ

Άσκηση 1.5
$|p(t)| \geq |q(t)|, \quad t \geq 0$

$(P): \ y' + py = 0$
$(Q): \ y' + qy = 0$
Αν όλες οι λύσεις του (Q) τείνουν προς το μηδέν $(t \to \infty)$
τότε όλες τις λύσεις της (P) τείνουν στο μηδέν
Λύση
Αν $q = 1$: $y' + y = 0 \Rightarrow y(t) = ce^{-t}$
Αν $p = -1$: $y' - y = 0 \Rightarrow y(t) = ce^{t} \to +\infty$

Η πρόταση είναι ψευδής

Άσκηση 1.6

$y'(t) + y(t) = g(t)$, $y(0) = 0$

$g(t) = \begin{cases} 2 & , t \in [0,1] \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$ Έχω ένα σημείο ασυνέχειας μόνο

Λύση

Η γενική λύση είναι

$(e^t y)' = e^t g(t) \Rightarrow$

$e^t y(t) - e^0 y(0) = \int_0^t e^s g(s)\, ds \Rightarrow$

$y(t) = e^{-t} \left[y(0) + \int_0^t g(s) e^s ds \right]$, $t \geq 0$

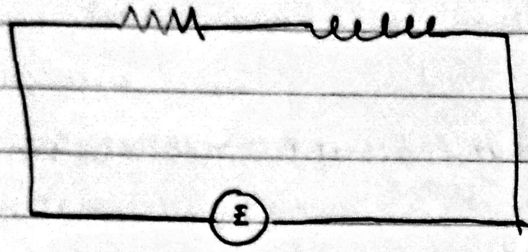
για $t > 1$ θα πρέπει να "κόψω" το ολοκλήρωμα γιατί έχω ασυνέχεια στο σημείο 1

για $t > 1$:

$y(t) = e^{-t} \left[y(0) + \int_0^1 e^s g(s) ds + \int_1^t g(s) e^s ds \right] \Rightarrow$

$y(t) = 2e^{1-t} - 2e^{-t}$

Εφαρμογή



$E(t) = E_0 \sin(\omega t)$

$I'(t) + \frac{R}{C} I(t) = \frac{1}{C} E(t)$

$$I(t) = e^{-\int_0^t R/C\, ds} \left[I(0) + \int_0^t E(s)\, e^{\int_0^s R/C\, du} ds \right]$$

$E_0 \sin(\omega t)$

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{C}t} + \frac{E(0)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 C^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

$\tan\phi = \frac{\omega L}{R}$

Εξίσωση Bernoulli

$y'(x) + p(x)\, y(x) = q(x)\, y^r \quad (r \neq 0, 1)$

Θέτουμε $z = y^{1-r}$

Τότε $z' = (1-r)\, y^{-r} \cdot y' \Rightarrow y' y^{-r} = \frac{1}{1-r} z'$

$y' + py = qy^r \Rightarrow y'y^r + py^{1-r} = q \Rightarrow$

$\frac{1}{1-r} z' + pz = q$

Παραδειγμα 2, σελ. 33

$y' - \frac{1}{x} y = -\frac{1}{2y}$, $y(-1) = 2$

Εφόσον έχω τιμή $x = -1$ τότε παίρνω το αριστερό κομμάτι

Οπότε δουλεύω για $x < 0$

$y' - \frac{1}{y} y = -\frac{1}{2} y^{-1}$ και έχω $r = -1$

Άρα $z = y^{1-(-1)} = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$

Θα έχω

$yy' - \frac{1}{x} y^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$z' - \frac{2}{x} z = -1$

Τώρα θα έχουμε $z' - \frac{2}{x} z = -1$ και $z(-1) = 4$, $x < 0$ / $z = y^2$

Η γενική λύση

$$z(x) = e^{-\int_{-1}^{x} -2/s \, ds} \left[z(-1) + \int_{-1}^{x} (-1) e^{\int_{-1}^{s} -2/u \, du} ds \right], \quad x < 0$$

$$z(x) = e^{2\int_{-1}^{x} 1/s \, ds} \left[4 - \int_{-1}^{x} e^{-2\int_{-1}^{s} 1/u \, du} ds \right]$$

$$z(x) = e^{2[\ln u]_{-1}^{x}} \left[4 - \int_{-1}^{x} e^{-2[\ln u]_{-1}^{s}} ds \right]$$

....

$z(x) =$ ....

Και άρα $y(x) = \sqrt{5x^2 + x}$, $x < 0$? κάτω από την ρίζα αρνητικό?

Θέλω να κρατήσω το πεδίο ορισμού που έχει μέσα το -1

Θέλω $5x^2 + x > 0$ Βρίσκω τις λύσεις, κάνω πινακάκι και παίρνω το διάστημα το κατάλληλο

→ Αοριστο ολοκλ.

$y = \pm\sqrt{cx^2 + x} \quad , \quad x < 0$

$y(-1) = 2$ λυση θετική αρα θα κρατησω το $+$
Οταν υπολογισω το c θα απαιτησω $cx^2 + x \geq 0$
Αναλογα με την αρχικη τιμη που μου δινει επιλεγω καθε φορά διαφορετικο πεδιο ορισμου

Ασκηση 4, σελ 36

i) $xy' + y = -2x^2y^2$ εχουμε $r = 2$, $x \neq 0$

$$z = y^{1-r} = y^{1-2} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$$

Αρα εχω

$$y' + \frac{1}{x}y = -2xy^2 \quad , \quad x \neq 0$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = -2x$$

$$z' - \frac{1}{x}z = 2x \quad , \quad x \neq 0$$

Οποτε εχουμε

$$z(x) = cx + 2x^2 \quad , \quad x \neq 0 \quad \text{και}$$

$$y(x) = \frac{1}{2x^2 + cx} = \frac{1}{x(2x+c)}$$

Αναλογα με το c και το που ειναι η αρχικη τιμη, επιλεγω το διαστημα μου

$c>0$ τοτε ικανοποιει την διαφ. εξ.

Λογιστική Εξίσωση

$y'(x) = ay(x) - by^2(x)$, $a, b > 0$, $y(0) = c > 0$

$y' - ay = -by^2$

$z = y^{1-r} = y^{-1} \Rightarrow z = \frac{1}{y}$ αρα $z' = -\frac{y'}{y^2}$

Οποτε $z' + az = b$, $t>0$

Γενικη λυση:

$$z(t) = e^{-at}\Big[\frac{1}{c} + \frac{b}{a}\overbrace{(\underbrace{e^{at}}_{>0} - 1)}^{>1}\Big]^{>0}, \quad t>0$$

"παει καλα" για $z(0) = 1/c$, $c>0$

→ Ολες οι λυσεις θα βγουν θετικές

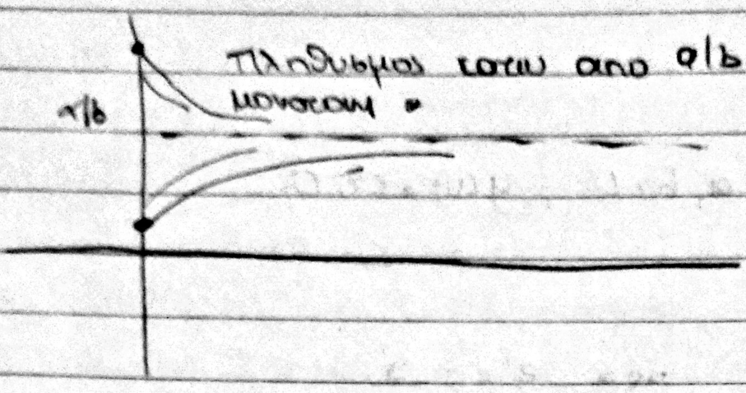
$$y(t) = \frac{1}{e^{-at}\left(\frac{1}{c} + \frac{b}{a}(e^{at}-1)\right)} > 0, \quad t>0$$

$$y(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + \underbrace{\left(\frac{1}{c} - \frac{b}{a}\right)}e^{-at}}, \quad t>0$$

→ τεινει 0 αν το αφησω να εξελιχθει στο χρονο

$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + 0} = \frac{a}{b}$ (ο πληθυσμος τεινει σταθερο)

* Αν $\frac{1}{c} - \frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} > \frac{b}{a} \Leftrightarrow c < \frac{a}{b}$ αρα $y(t) \leq \frac{a}{b}$



$y'(t) = y(t)\left[a - by(t)\right]$

$y'(t) = by(t)\left[\frac{a}{b} - y(t)\right], \quad t \geq 0$

Εξίσωση Riccati

$y' + a(x)y + b(x)y^2 + d(x) = 0, \quad x \in I$

με μαντεψιά?

Αν y_1 λύση τότε $y = y_1 + \frac{1}{z}$ → α' τάξης

$y_1' - \frac{z'}{z^2} + a\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + b\left(y_1^2 + \frac{1}{z^2} + 2\frac{y}{z}\right) + d = 0$

$y_1' - \frac{z'}{z^2} + ay_1 + \frac{a}{z} + by_1^2 + b\cdot\frac{1}{z^2} + b2\frac{y_1}{z} + d = 0$

λυση εξ για αυτο τα εξαφανω

$y_1' - z' + ay_1 + az + by_1^2 + b + 2by_1 z + d = 0$

παραδειγμα 2, σελ 35

$y' - y + e^{-x} y^2 - e^x = 0$ ①

$y_1 = \kappa e^{\lambda x}$ να βρω τετοια λυση

αντικατασταση την y_1 στην ①:

$\kappa\lambda e^{\lambda x} - \kappa e^{\lambda x} + e^{-x} \kappa^2 e^{2\lambda x} - e^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$e^x \left(\kappa\lambda e^{(\lambda-1)x} - \kappa e^{(\lambda-1)x} + \kappa^2 e^{2(\lambda-1)x} - 1 \right) = 0$ $\Rightarrow$

$\kappa\lambda e^{(\lambda-1)x} - \kappa e^{(\lambda-1)x} + \kappa^2 e^{2(\lambda-1)x} = 1$

$\lambda = 1$: $\kappa - \kappa + \kappa^2 = 1 \Rightarrow \kappa^2 = 1 \Rightarrow \kappa = \pm 1$

$x = 0$: $\kappa\lambda - \kappa + \kappa^2 - 1 = 0$

μπορω να βαλω $\kappa = 1$ και να βρω το λ

$\lambda - 1 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

μπορω να βαλω και $x = 1$ ...

Αρα εχω βρει $y_1 = e^x$

Βαζω $y = e^x + \frac{1}{z}$ και μετα απο πραξεις

$z' - z = e^{-x} \overset{(\Gamma.\Lambda)}{\Rightarrow} z(x) = ce^x - \frac{1}{2} e^{-x}$

και $y(x) = e^x + \dfrac{2}{2ce^x - e^{-x}}$ καινουργια λυση

$y_1(x) = e^x$ παλαια λύση